

doi:10.3969/j.issn.1001-8352.2022.02.010

# 水下爆破激励堤岸振动主频的衰减规律<sup>\*</sup>

李 飞<sup>①</sup> 付艳恕<sup>②</sup> 顾 云<sup>①</sup> 王海涛<sup>①</sup> 唐 毅<sup>①</sup>

①核工业南京建设集团有限公司(江苏南京,211102)

②南昌大学机电工程学院(江西南昌,330031)

[摘 要] 为了探究水下爆破激励堤岸岩土振动的主频及其传播过程的衰减规律,采用量纲分析法,考虑水、土介质变化物征,建立了影响爆破振动主频各物理量之间的泛函。结合江西省宜春市秀江双桥爆破拆除作业获得的水下爆破振动在堤岸及其近邻域传播测试数据,通过回归拟合,求解爆破振动主频公式。得到爆破振动主频预测值与实测值的平均相对误差为 8.87%,较未考虑水土介质变化特征的预测方法得到的平均相对误差小。结果表明,通过引入监测点距爆心之间水、土介质传播域距离比值系数,使得振动主频的预测表达式符合水下爆破振动在堤岸传播的工程物理实际。

[关键词] 水下爆破;量纲分析;振动主频;回归分析

[分类号] TU746.5;O382

## Attenuation Law of Dominant Frequency of Bank Vibration Excited by Underwater Blasting

LI Fei<sup>①</sup>, FU Yanshu<sup>②</sup>, GU Yun<sup>①</sup>, WANG Haitao<sup>①</sup>, TANG Yi<sup>①</sup>

①Nuclear Industry Nanjing Construction Group Co., Ltd. (Jiangsu Nanjing, 211102)

②School of Mechanical and Electrical Engineering, Nanchang University (Jiangxi Nanchang, 330031)

[ABSTRACT] In order to explore the main frequency of bank geotechnical vibration excited by underwater blasting and its attenuation law in propagation process, dimensional analysis method was applied to establish the functional between physical parameters that affect the main frequency of blasting vibration, considering the influence of water and geotechnical medium variation. Combined with the experimental data of underwater blasting vibration propagation on bank and its surroundings in the blasting demolition project of Xiujiang Double Bridge in Yichun City, Jiangxi Province, the formula of dominant frequency of blasting vibration was solved through regression fitting. The average relative error between the predicted value and the measured value of blasting vibration dominant frequency is 8.87%, which is smaller than that obtained by the prediction method without considering the variation characteristics of water and soil media. Results show that, by introducing the distance ratio of water and geotechnical medium between monitoring point and blasting center, formula deduced by the dimensional analysis has better accuracy in predicting the dominant frequency of blasting vibration in underwater blasting.

[KEYWORDS] underwater blasting; dimensional analysis; dominant frequency of vibration; regression analysis

### 引言

众多资料分析表明,随着传播距离的增加,爆破振动波振动主频(介质质点最大振幅所对应波的频率)会不断降低,高频成分振动波衰减速度更快,而

低频成分振动波衰减相对较慢。因此,在距离爆源较远处,爆破振动波的低频成分起主要作用。而低频率更接近建(构)筑物的固有频率,从而引起结构共振的可能性更大,对建(构)筑物造成振动破坏。

振动主频是爆破振动危害三要素之一<sup>[1]</sup>。《爆破安全规程》(GB6722—2014)<sup>[2]</sup>给出建(构)筑物

<sup>\*</sup> 收稿日期:2021-02-22  
基金项目:核工业南京建设集团有限公司开放基金(BP-KFJJ-2020-003)  
第一作者:李飞(1980-),男,本科,爆破高级工程师,主要从事工程爆破。E-mail:1020403618@qq.com  
通信作者:付艳恕(1982-),男,副教授,硕导,主要从事爆炸与冲击动力学研究及其工程应用。E-mail:yshfu@ncu.edu.cn

爆破振动安全的判据时,也考虑了爆破振动主频的影响。

目前,国内外关于爆破振动主频随传播过程衰减规律的研究包括基于爆破振动强度影响因素提出经验公式<sup>[3]</sup>,或基于实验测试给出计算建议<sup>[4]</sup>,或基于波的传播理论导出均匀介质中主频衰减规律<sup>[5]</sup>。事实上,爆破振动波传播行为与介质属性紧密关联,通常采用量纲分析寻找物理现象之间的规律<sup>[6-7]</sup>。以上研究都是基于露天爆破,并没有考虑水域因素。

相比于岩土爆破,水下爆破对堤岸近邻域结构的振动激励存在两个显著的差异:一是因流体状态的水介质不能承受剪切载荷而无法传递横波,使得水下爆破对堤岸近邻域结构振动激励天然地过滤掉了横波成分,而主要呈现为纵波激励;二是因水介质与岩土介质波阻抗的差异,使得来自于水下爆破的纵波在水、土界面上发生入射、反射和透射,具体的入射波、反射波、透射波强度与水、岩土介质波阻抗相关。因而,为了评价水下爆破振动对堤岸及其近邻域建筑结构的影响,有必要了解爆破振动主频传播过程中随介质变化的衰减规律。

本文中,结合桥梁爆破拆除项目,考虑水下爆破振动在堤岸及其近邻域传播所伴随的水、土介质变化特征,运用量纲分析推导出水下爆破振动主频的泛函关系式;然后,采用回归拟合方法求解出具体的爆破振动主频预测公式;最后,将预测结果与实测结果进行对比,验证所得水下爆破振动在堤岸近邻域传播主频预测公式的合理性。

## 1 振动波界面传播行为

当振动波从一种介质进入到另一种介质时,会在两个介质的分界面处发生反射及透射。假设振动波在介质 I 和介质 II 中传播, $\rho$ 、 $c$  分别为介质密度和体波声速,相应的波阻抗分别为  $\rho_1 c_1$  和  $\rho_2 c_2$ 。在分界面附近,两种介质由于波动扰动得到的法向速度分别为  $v_1$  和  $v_2$ ,得到的压力分别为  $p_1$  和  $p_2$ 。

如图 1 所示,根据介质分界面处的波动边界条件,两种介质的压力在分界面处连续,法向速度相等。即

$$p_1 = p_2; v_1 = v_2. \quad (1)$$

对于振动波斜入射,当振动波传播方向在  $xy$  平面内,入射于分界面上时,与  $x$  轴的夹角为  $\theta_r$ ;反射与透射时,与  $x$  轴的夹角分别为  $\theta_t$  和  $\theta_l$ ,见图 2。

通过对振动波斜入射时计算入射、反射及透射

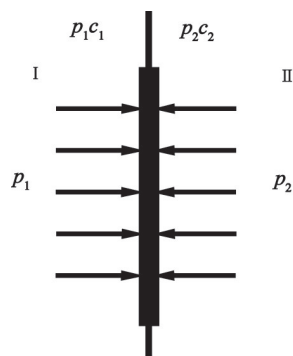


图 1 振动波在两种介质传播的分界面

Fig. 1 Interface of vibration wave propagation in two media

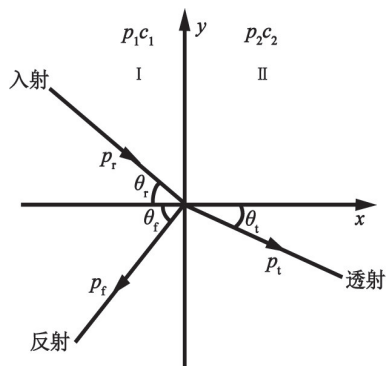


图 2 波动斜入射时的反射和透射

Fig. 2 Reflection and transmission of vibration wave at oblique incidence

时压力与速度的连续条件,计算入射波、反射波及透射波的压力与速度公式,见表 1。

振动波斜入射时,根据连续性边界条件,入射、反射及透射时,在  $x = 0$  的分界面处,扰动压力与质点速度有:

$$\begin{cases} p_r + p_t = p_i; \\ v_{rx} + v_{tx} = v_{ix}. \end{cases} \quad (2)$$

式中: $p_r$  为入射波压力; $p_t$  为反射波压力; $p_l$  为透射波压力; $v_{rx}$  为入射波质点速度; $v_{tx}$  为反射波质点速度; $v_{lx}$  为透射波质点速度。

再根据斯奈尔声波反射与折射定理<sup>[8]</sup>,有

$$\begin{cases} \theta_r = \theta_t; \\ \frac{\sin \theta_r}{\sin \theta_l} = \frac{c_1}{c_2}. \end{cases} \quad (3)$$

可求得  $v_{tx}$  与  $v_{rx}$  之比  $k$  为:

$$k = \frac{v_{tx}}{v_{rx}} = \frac{2\rho_1 c_1 \cos \theta_l}{\rho_1 c_1 \cos \theta_l + \rho_2 c_2 \cos \theta_r} = \frac{2}{1 + \frac{\rho_2 \tan \theta_l}{\rho_1 \tan \theta_r}}. \quad (4)$$

本文中,式(4)中的  $v_{tx}$  实际上是爆破振动强度

表1 声波斜入射时入射波、反射波及透射波的压力与速度公式

Tab.1 Pressure formulas and velocity formulas of incidence wave, reflection wave and transmission wave of sound wave at oblique incidence

波	夹角	压力	速度
入射波	$\alpha = \theta_r$ $\beta = 90^\circ - \theta_r$ $\gamma = 90^\circ$	$p_r = p_{ra} e^{j(ut - k_1 x \cos \theta_r - k_1 y \sin \theta_r)}$	$v_{rx} = \frac{\cos \theta_r}{\rho_1 c_1} p_r$
反射波	$\alpha = \pi - \theta_f$ $\beta = 90^\circ - \theta_f$ $\gamma = 90^\circ$	$p_f = p_{fa} e^{j(ut + k_1 x \cos \theta_f - k_1 y \sin \theta_f)}$	$v_{fx} = \frac{\cos \theta_f}{\rho_1 c_1} p_f$
透射波	$\alpha = \theta_t$ $\beta = 90^\circ - \theta_t$ $\gamma = 90^\circ$	$p_t = p_{ta} e^{j(ut - k_2 x \cos \theta_t - k_2 y \sin \theta_t)}$	$v_{tx} = \frac{\cos \theta_t}{\rho_2 c_2} p_t$

的判据。从式(4)可以看出,波动在分界面上的  $v_{tx}$  由入射波的质点速度、波阻抗、入射夹角以及透射夹角共同决定。也即由于界面的存在,使得入射角与透射角对应的几何参数(图3)影响着爆破振动波的强度,从而影响着爆破振动主频。

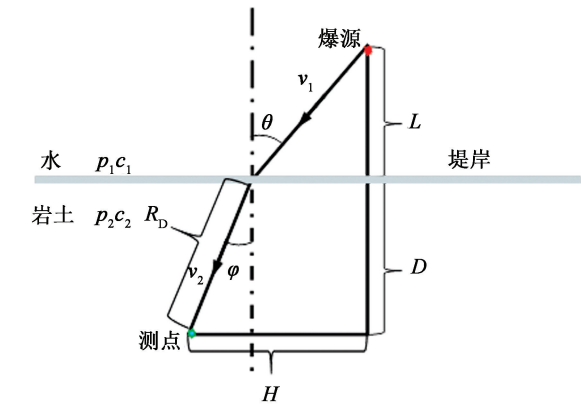


图3 振动波从水斜入射到岩土

Fig.3 Oblique incidence of vibration wave from water to rock and soil

2 水土耦合域振动传播主频泛函

研究水下爆破振动在堤岸及近邻域传播(图3)时,由几何关系可知:

$L \tan \theta + D \tan \varphi = H; \Leftrightarrow L + \frac{D \tan \varphi}{\tan \theta} = \frac{H}{\tan \theta}。$  (5)

将式(5)代入式(4)得:

$k = \frac{v_2}{v_1} = \frac{2}{1 + \frac{\rho_2(H-L)}{\rho_1 D}}。$  (6)

从式(6)可以看出,波动在介质界面上的透射由两介质密度与空间几何参数  $H$ 、 $L$ 、 $D$  共同决定。然而,由于介质物理属性的变化,水下爆破振动

在水、土介质中的传播距离和入射角度等因素各异,使得爆破振动传播规律较为复杂,建立明确的物理、数学方程极为困难,此时便需要采用量纲分析法<sup>[9]</sup>建立相应的经验公式,推导振动主频衰减规律。

影响爆破振动主频的自变量<sup>[10-13]</sup> 分别是炸药量  $Q$ 、爆心距  $R$ 、测点到堤岸的距离  $R_D$ 、介质密度  $\rho$  和介质中纵波传播速度  $c_p$ 。爆破振动主频  $f$  作为因变量,根据  $\Pi$  定理得到以下函数式:

$f = \varphi(Q, R, c_p, \rho, R_D)。$  (7)

由式(7)知,物理量个数为  $n = 6$ 。根据  $\Pi$  定理,取基本量为  $Q, R, c_p$ ,故基本量的量纲数为  $m = 3$ ,导出量与因变量的量纲数为  $n - m = 3$ ,  $\Pi$ 、 $\Pi_1$ 、 $\Pi_2$  代表的是无量纲变量,则有:

$$\begin{cases} \Pi = \frac{f}{Q^\alpha R^\beta c_p^\gamma}; \\ \Pi_1 = \frac{\rho}{Q^{\alpha_1} R^{\beta_1} c_p^{\gamma_1}}; \\ \Pi_2 = \frac{R_D}{Q^{\alpha_2} R^{\beta_2} c_p^{\gamma_2}}。 \end{cases} \quad (8)$$

式中: $\alpha, \beta, \gamma$  均为待定系数。

以  $T$ 、 $M$ 、 $L$  分别表示时间、质量及长度的量纲,则各物理量的量纲如表2所示。

表2 水下爆破振动的物理量及量纲

Tab.2 Physical parameters and dimensions in underwater blasting vibration

物理量	$f$	$Q$	$R$	$c_p$	$\rho$	$R_D$
量纲	$T^{-1}$	$M$	$L$	$LT^{-1}$	$ML^{-3}$	$L$

$\Pi$ 、 $\Pi_1$ 、 $\Pi_2$  都是无量纲变量,分别有:

$$\begin{cases} T^{-1} = M^\alpha L^\beta (LT^{-1})^\gamma = M^\alpha L^{\beta+\gamma} T^{-\gamma}; \\ ML^{-3} = M^{\alpha_1} L^{\beta_1} (LT^{-1})^{\gamma_1} = M^{\alpha_1} L^{\beta_1+\gamma_1} T^{-\gamma_1}; \\ L = M^{\alpha_2} L^{\beta_2} (LT^{-1})^{\gamma_2} = M^{\alpha_2} L^{\beta_2+\gamma_2} T^{-\gamma_2}。 \end{cases} \quad (9)$$

对式(9)等号两边对应量纲指数进行求解,可得: $\alpha=0, \beta=-1, \gamma=1; \alpha_1=1, \beta_1=-3, \gamma_1=0; \alpha_2=0, \beta_2=1, \gamma_2=0$ 。

于是有:

$$\begin{cases} \Pi = \frac{f}{Q^\alpha R^\beta c_p^\gamma} = \frac{fR}{c_p}; \\ \Pi_1 = \frac{\rho}{Q^{\alpha_1} R^{\beta_1} c_p^{\gamma_1}} = \frac{\rho}{QR^{-3}}; \\ \Pi_2 = \frac{R_D}{Q^{\alpha_2} R^{\beta_2} c_p^{\gamma_2}} = \frac{R_D}{R}. \end{cases} \quad (10)$$

由上述计算可得无量纲变量之间的函数关系式为:

$$\frac{fR}{c_p} = \varphi\left(\frac{\rho}{QR^{-3}}, \frac{R_D}{R}\right). \quad (11)$$

对式(11)进一步转化得:

$$\ln \frac{fR}{c_p} = \eta_1 - \frac{1}{3} \eta_2 \ln \frac{\sqrt[3]{Q}}{\rho^3 R} + \eta_3 \ln \frac{R_D}{R}. \quad (12)$$

式中: $\eta_1 - (1/3) \times \eta_2 \ln[\sqrt[3]{Q}/(\rho^3 R)]$ 是场地因素与炸药量对振动主频的综合影响; $\eta_3 \ln(R_D/R)$ 是介质条件对振动主频的影响; $\eta_1, \eta_2, \eta_3$ 分别为爆破点至保护对象间的地形、地质与水土耦合条件等有关的系数。

令  $\ln K = \eta_1, \beta_1 = -\eta_2/3, \beta_2 = \eta_3$ , 则爆破振动主频  $f$  的计算公式为:

$$f = K \frac{c_p}{R} \left(\frac{\sqrt[3]{Q}}{\rho^3 R}\right)^{\beta_1} \left(\frac{R_D}{R}\right)^{\beta_2}. \quad (13)$$

对于特定的场地,介质密度  $\rho$  及其纵波传播速度  $c_p$  均可记为常数,由式(13)可进一步化简得:

$$f = \frac{K}{R} \left(\frac{\sqrt[3]{Q}}{R}\right)^{\beta_1} \left(\frac{R_D}{R}\right)^{\beta_2}. \quad (14)$$

式中: $K$ 是场地系数; $\beta_1$ 是衰减系数; $\beta_2$ 是与水陆距离相关的影响系数。

### 3 振动主频函数回归拟合

在式(14)中: $Q, R, R_D$ 是已知量; $K, \beta_1, \beta_2$ 是待定参数,即需要根据测试所得振动数据进行拟合求解的参数。

在数学上,解决这类问题通常采用非线性最小二乘法<sup>[14-15]</sup>。

用非线性最小二乘法求待定参数  $K, \beta_1, \beta_2$ ,使目标函数最小。

令  $\varphi_i = R_i^{-1} \left(\frac{\sqrt[3]{Q_i}}{R_i}\right)^{\beta_1} \left(\frac{R_{Di}}{R_i}\right)^{\beta_2}$ , 即

$$\min f(w) = \sum_{i=1}^8 (V_i - K\varphi_i)^2. \quad (15)$$

式中: $w = [K, \beta_1, \beta_2]^T$ 是待定参数。

目标函数  $f(w)$  取最小值的必要条件为:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial K} = 0; \\ \frac{\partial f}{\partial \beta_1} = 0; \\ \frac{\partial f}{\partial \beta_2} = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^8 (V_i - K\varphi_i) \varphi_i = 0; \\ \sum_{i=1}^8 (V_i - K\varphi_i) K\varphi_i \ln \frac{\sqrt[3]{Q}}{R} = 0; \\ \sum_{i=1}^8 (V_i - K\varphi_i) K\varphi_i \ln \frac{R_{Di}}{R_i} = 0. \end{cases} \quad (16)$$

式(16)是一个非线性方程组,一般采用数值迭代法进行求解。采用高斯-牛顿迭代法求解<sup>[16]</sup>,获得非线性方程组近似解  $K, \beta_1, \beta_2$ ,从而求出式(14)。

对于式(14)中待定参数拟合效果,可以根据残差平方和  $R_{ss}$  来测定:

$$R_{ss} = \sum_{i=1}^8 (V_i - \hat{V}_i)^2. \quad (17)$$

张立国等<sup>[6]</sup>针对岩土爆破振动主频推导出:

$$f = \frac{K}{R} \left(\frac{\sqrt[3]{Q}}{R}\right)^{\beta}. \quad (18)$$

求得的式(14),可与式(18)进行对比分析。

## 4 基于实测数据导出主频函数

### 4.1 振动测试结果

宜春秀江双桥位于在江西省宜春市袁州区城西的秀江河之上,于1951年建成,至1984年加建一座桥梁。桥长193 m,为双幅桥,由主桥和辅桥组成。由于规划建设需要,需将双桥爆破拆除。经现场勘察,双桥连接宜春南路和宜春北路,东西方向为秀江下游和上游,南北两侧为闹市区,周围环境较复杂。其中,在北侧最近处建筑物有东面55 m处的培训楼和西面35 m的超市;南侧最近处建筑物有54 m处的职业学校;西面200 m处有第二附属医院。受保护建(构)筑物众多,爆破振动备受关注。利用NUBOX-6016 爆破测振仪对项目水下爆破激励下堤岸振动进行监测,测点布置方案如图4所示。新、旧两幅桥延时爆破,4个测点(图4中★号)共得到8组数据,测点离爆心空间距离见表3。

### 4.2 振动主频函数表达式

在采用非线性最小二乘法的基础上,用Matlab编写的程序对式(14)和式(18)分别进行拟合求解,得到表4所示结果。

根据表4可以看出,采用量纲分析推导出的式(14)的残差平方和更小,故拟合效果更优。

那么根据表4列出的参数,可知式(18)和式(14)的具体表达式分别为:

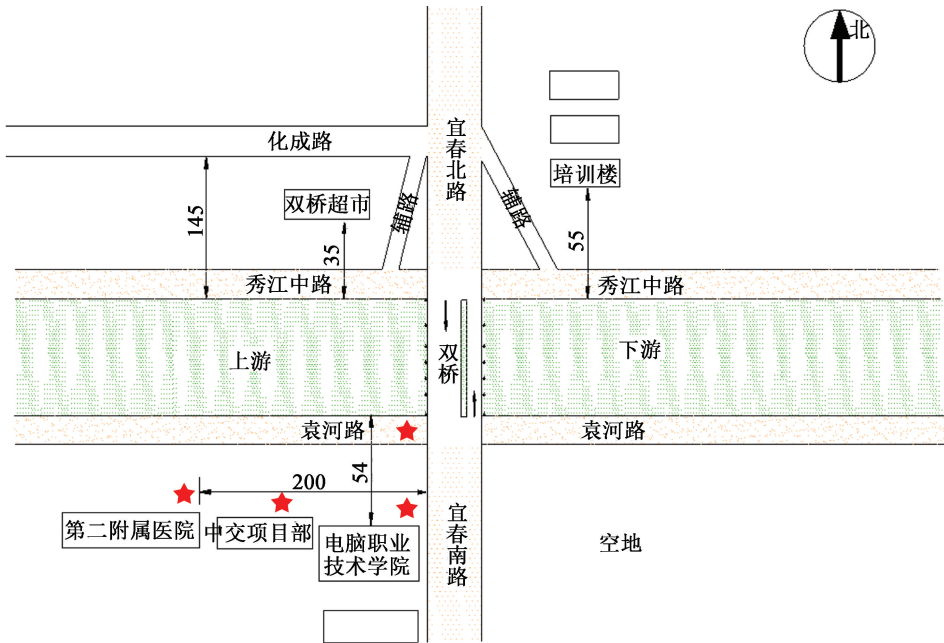


图 4 测点布置(单位:m)  
Fig.4 Layout of measuring points (Unit: m)

表 3 爆破振动监测数据

Tab.3 Monitoring data of blasting vibration

序号	$Q/\text{kg}$	$R/\text{m}$	$R_0/\text{m}$	$f/\text{Hz}$
1 <sup>#</sup>	14.40	53.707	53.707	3.050
2 <sup>#</sup>	120.10	97.985	26.817	5.490
3 <sup>#</sup>	71.65	126.487	54.358	3.050
4 <sup>#</sup>	120.10	174.657	104.996	6.100
5 <sup>#</sup>	71.65	101.897	27.887	3.050
6 <sup>#</sup>	120.10	148.946	79.033	6.100
7 <sup>#</sup>	71.65	200.251	161.861	3.660
8 <sup>#</sup>	41.50	257.857	198.156	7.320

表 4 拟合参数  
Tab.4 Fitting parameters

参数	式(18)	式(14)
$K$	0.101	0.418
$\beta_1$	1.373	0.809
$\beta_2$		0.240
$R_{ss}$	15.970	1.299

$$f=\frac{0.101}{R}(\frac{\sqrt[3]{Q}}{R})^{1.373}; \tag{19}$$

$$f=\frac{0.418}{R}(\frac{\sqrt[3]{Q}}{R})^{0.809}(\frac{R_0}{R})^{0.240}。 \tag{20}$$

由式(19)、式(20)可以分别计算对应的爆破振动主频预测值,具体结果见表 5。  
由表5可以看出,采用式(18)计算出的平均相

表 5 爆破振动主频的实测与预测结果

Tab.5 Measured and predicted results of dominant frequency of blasting vibration

序号	实测 $f/\text{Hz}$	式(19) 预测 $f/\text{Hz}$	相对误差/ %	式(20) 预测 $f/\text{Hz}$	相对误差/ %
1 <sup>#</sup>	3.05	1.506	50.62	2.715	10.99
2 <sup>#</sup>	5.49	4.975	9.37	5.194	5.39
3 <sup>#</sup>	3.05	4.320	41.65	3.478	14.03
4 <sup>#</sup>	6.10	6.172	1.19	5.988	1.83
5 <sup>#</sup>	3.05	3.986	30.68	3.609	18.33
6 <sup>#</sup>	6.10	5.817	4.65	5.550	9.02
7 <sup>#</sup>	3.66	5.128	40.11	3.819	4.34
8 <sup>#</sup>	7.32	4.389	40.04	7.833	7.00

对误差为27.29%,而采用(14)计算出的平均相对误差为 8.87%。采用量纲分析推导出的式(14)拟合的振动主频能够较准确地反映水土耦合作用下的爆破振动,预测的水下爆破振动在堤岸近邻域传播主频与实验测试结果相关性更优,体现了本研究方法的合理性。

5 结论

基于江西省宜春市秀江双桥水下墩台爆破拆除项目测试数据,考虑水、土介质变化特征,采用量纲



分析法导出了水下爆破激励下堤岸振动主频衰减规律表达式,并与未考虑水、土介质变化特征的预测方法进行对比,得出以下结论:

1)通过综合影响系数呈现水、土介质物征变化对振动传播主频的影响,同时引入监测点距爆心之间水、土介质传播域距离比值系数,使得振动主频预测表达式在物理上尊重水下爆破振动在堤岸传播工程实际,所得结果更具科学、合理性。

2)通过比较回归拟合中的残差平方和可知,较之于未考虑水、土介质变化预测方法而言,基于量纲分析推导出的公式对于爆破振动主频预测的精度较高,能够更好地反映水下爆破振动主频衰减规律。

3)通过预测与实测爆破振动主频的相对误差,可以看出本文研究方法得到的振动主频预测值能够较准确地反映水下爆破在堤岸近邻域振动主频的衰减规律。

### 参 考 文 献

- [1] 李夕兵,凌同华,张义平. 爆破震动信号分析理论与技术[M]. 北京:科学出版社,2009:22-23.  
LI X B, LING T H, ZHANG Y P. Analysis of blast vibration signals: theories and methods [M]. Beijing: Science Press, 2009: 22-23.
- [2] 国家安全生产监督管理局. 爆破安全规程:GB 6722—2014[S]. 北京:中国标准出版社,2014.  
State Administration of Work Safety. Safety regulations for blasting: GB 6722—2014 [S]. Beijing: Standards Press of China, 2014.
- [3] 亨利奇. 爆炸动力学及其应用[M]. 北京:科学出版社,1987:35-37.
- [4] 唐春海,于亚伦,王建宙. 爆破地震动安全判据的初步探讨[J]. 有色金属,2001,53(1):1-4.  
TANG C H, YU Y L, WANG J Z. Elementary study of safety criterion for blasting vibration [J]. Nonferrous Metals, 2001,53(1):1-4.
- [5] 孟海利,郭峰. 爆破地震波主频率的试验研究[J]. 铁道工程学报,2009(11):81-83,93.  
MENG H L, GUO F. Experimental research on the master frequency of blasting seismic wave [J]. Journal of Railway Engineering Society, 2009(11):81-83,93.
- [6] 张立国,龚敏,于亚伦. 爆破振动频率预测及其回归分析[J]. 辽宁工程技术大学学报,2005,24(2):187-189.  
ZHANG L G, GONG M, YU Y L. Forecast and regression analysis of blasting vibration frequency[J]. Journal of Liaoning Technical University, 2005,24(2):187-189.
- [7] 卢文波,周俊汝,陈明,等. 爆破振动主频衰减公式研究[J]. 工程爆破,2015,21(6):1-6,24.  
LU W B, ZHOU J R, CHEN M, et al. Study on attenuation formula of dominant frequency of blasting vibration [J]. Engineering Blasting, 2015, 21(6): 1-6,24.
- [8] 杜功焕,朱哲民,龚秀芬. 声学基础[M]. 3版. 南京:南京大学出版社,2012:137.
- [9] 谈庆明. 量纲分析[M]. 合肥:中国科学技术大学出版社,2005.  
TAN Q M. Dimensional analysis [M]. Hefei: University of Science and Technology of China Press, 2005.
- [10] 李孝林,王少雄,高怀树. 爆破振动频率影响因素分析[J]. 辽宁工程技术大学学报,2006,25(2):204-206.  
LI X L, WANG S X, GAO H S. Analysis of factors affecting blasting vibration frequency [J]. Journal of Liaoning Technical University, 2006,25(2):204-206.
- [11] 王永庆,魏晓林,夏柏如,等. 爆破振动频率预测研究[J]. 爆破,2007,24(4):17-20.  
WANG Y Q, WEI X L, XIA B R, et al. Study on forecast of blasting seismic frequency [J]. Blasting, 2007,24(4):17-20.
- [12] 高富强,侯爱军,杨小林,等. 基于量纲理论的爆破振动频率分析[J]. 爆破,2010,27(3):1-3,8.  
GAO F Q, HOU A J, YANG X L, et al. Analysis of blasting vibration frequency based on dimensional method [J]. Blasting, 2010,27(3):1-3,8.
- [13] 费鸿禄,张超逸,洪陈超,等. 全断面与台阶法爆破作用下围岩的振动特征[J]. 爆破器材,2017,46(3):52-56.  
FEI H L, ZHANG C Y, HONG C C, et al. Dynamic response of surrounding rock under full face or bench blasting excavation [J]. Explosive Materials, 2017,46(3):52-56.
- [14] 谢兰,高东红. 非线性回归方法的应用与比较[J]. 数学的实践与认识,2009,39(10):117-121.  
XIE L, GAO D H. The application and comparison of different nonlinear fit methods [J]. Mathematics in Practice and Theory, 2009,39(10):117-121.
- [15] 吕涛,石永强,黄诚,等. 非线性回归法求解爆破振动速度衰减公式参数[J]. 岩土力学,2007,28(9):1871-1878.  
LÜ T, SHI Y Q, HUANG C, et al. Study on attenuation parameters of blasting vibration by nonlinear regression analysis [J]. Rock and Soil Mechanics, 2007,28(9):1871-1878.
- [16] 马昌凤. 最优化方法及其 Matlab 程序设计[M]. 北京:科学出版社,2010:40-48.